**Espaces vectoriels normés**

Propriété : (Inégalité triangulaire inversée)

Soit un espace vectoriel normé. Alors pour tous , on a

Démonstration : ⍟

Soit

Ainsi .

Par symétrie, on a aussi

Donc

Propriété : (Exemples de normes sur )

Pour , on pose

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | . |

Ces trois applications sont des normes sur

Démonstration : ⍟

* Soit alors donc existe et est à valeurs positives

Ainsi

* Soit .
* Soient
* Soient

On veut montrer que

On a :

Donc

Or par Cauchy-Schwarz,

Donc

On obtient le résultat demandé par croissance de sur

Tracé des boules unitaires :

Démonstration : ⍟

* Notons

Soit

Donc est le disque de centre 0 et de rayon 1

* Notons

* Notons

Une image contenant ligne, motif, diagramme, Symétrie

Description générée automatiquement Si alors

Si alors

Si alors

Si alors

(ça fait un genre de losange)

Prop 2.2 ⍟ (démonstration de la norme infinie)

* Soit , l’ensemble est non vide (car ), inclus dans et est majoré car est bornée donc .

Ainsi admet une borne supérieure () donc est bien définie.

Aussi on a bien

* Séparation : Soit

Si , alors , donc

Supposons . Alors ,

Donc , ie par séparation de , donc

* Homogénéité : Soit soit . On veut montrer

Et comme le sup d’un ensemble est le plus petit majorant de cet ensemble,

Si , alors

Donc comme ,

Ainsi,

Et on vérifie que cette égalité est vraie même si  :

* Inégalité triangulaire : Soient , soit

On passe à la borne supérieure pour conclure :

Donc est une norme sur